

Chapitre 5 : Fonction polynôme de degré 2

Partie 2

I. Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels avec } a \neq 0.$$

Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du polynôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :

L'équation $2x^2 - 5x + 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du polynôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ , égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.

- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Démonstration : (au programme)

On a vu dans le chapitre 1 que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Donc :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (E) \text{ car } a \neq 0$$

Si $\Delta < 0$:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ car $4a^2 < 0$ Ce qui est impossible donc pas de solution réelles.

Si $\Delta = 0$:

$$(E) \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Si $\Delta > 0$:

$$(E) \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Résoudre les équations suivantes :

a) $6x^2 - x - 1 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1) \\ &= 25 > 0 \end{aligned}$$

donc 2 solutions réelles :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{1 + 5}{12} & &= \frac{1 - 5}{12} \\ &= \frac{1}{2} & &= \frac{-4}{12} \\ & & &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc 1 seule solution réelle :

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b}{2a} \\ x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

c) $x^2 + 3x + 8 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 3^2 - 4 \times 8 \\ &= -23 < 0 \end{aligned}$$

c'est impossible donc aucune solution réelle

Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Exemple : $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 2 \times (-1) + 3 = 0$$

donc $x_1 = -1$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow -1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 3$$

II. Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x , on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.

- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x , on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque : Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f .

Exemples :

Factoriser les polynômes suivants :

a) $4x^2 + 19x - 5$ b) $9x^2 - 6x + 1$

$$\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441 > 0$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ avec } a = 4;$$

$$x_1 = \frac{-19 - 21}{8} \quad x_2 = \frac{-19 + 21}{8}$$

$$= 5$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\text{donc } f(x) = 4(x - 5)(x - \frac{1}{4})$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$f(x) = a(x - x_0)^2 \text{ avec } a = 9;$$

$$x_0 = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = 9(x - \frac{1}{3})^2$$

III. Signe d'un polynôme du second degré

Remarque préliminaire :

Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- si $a > 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut :



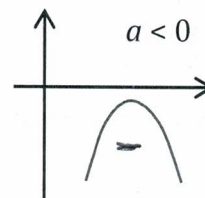
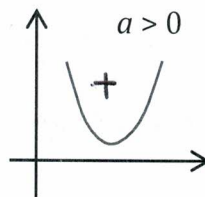
- si $a < 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas :



Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

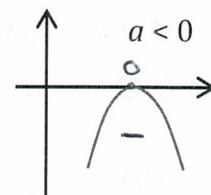
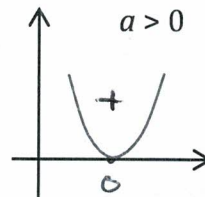
- Si $\Delta < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	



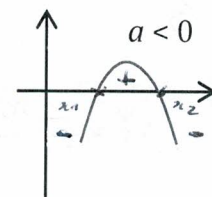
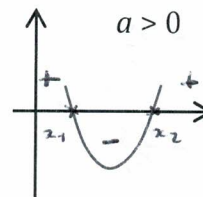
- Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a



- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a



Méthode : Résoudre une inéquation du second degré

Résoudre l'inéquation : $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes du polynôme obtenu.

$$x^2 + 3x - 5 < -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 5 + x - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 7 < 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-7)$$

$$= 44 > 0$$

Donc $x^2 + 4x - 7$ a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{44}}{2}$$

$$= -2 + \sqrt{11}$$

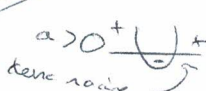
$$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{44}}{2}$$

$$= -2 - \sqrt{11}$$

Comme $a = 1 > 0$, on a :

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
$x^2 + 4x - 7$	+	$\ominus$	$\ominus$	+

$$S =] -2 - \sqrt{11} ; -2 + \sqrt{11} [$$

Braillon :
 $a > 0$ 

IV. Application : position relative de deux courbes

Méthode : Étudier la position de deux courbes

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ et $g(x) = x - 1$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g .

On va étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$: $(-x^2 + 8x - 11) - (x - 1)$

$$-x^2 + 8x - 11 - x + 1$$

$$-x^2 + 7x - 10$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \times (-10) \times (-1)$$

$$= 9 > 0$$

donc 2 racines réelles :

$$x_1 = \frac{-7+3}{-2}$$

$$x_2 = \frac{-7-3}{-2}$$

$$= 2$$

$$= 5$$

comme $a = -1 < 0$, on a :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	-	0	0	-

$$f(x) > g(x) \text{ sur }]2; 5[$$

$$\text{et } f(x) < g(x) \text{ sur }]-\infty; 2[\cup]5; +\infty[$$

La courbe C_f est en-dessous de la courbe C_g
pour tout x dans l'intervalle

$] -\infty; 2[\cup] 5; +\infty[$ et au dessus sur

$] 2; 5[$

